

# 小信号等效电路

Week9-10 讲的都是小信号等效电路，week9 是 MOS，week10 是 BJT。其实非常相似，所以放在一起讲了。（BJT 顺带讲一下 week5-6 的三极管本身）

笔者也在复习（要学吐了口区），有问题欢迎指出，教学相长嘛。

期末时间紧，就不细排版了……

小信号等效电路，可以去除电路直流部分，把电路转换成纯交流电路模型，以便分析信号输入输出特征。

当输入信号在某一直流工作点附近波动时，我们先直流分析，得到一些必要的参数，比如此时输出电阻 $r_o$ ，跨导 $g_m$ ，三极管的扩散电阻 $r_{\pi}$ 等等。可以理解为，直流工作通过改变这些参数来影响纯交流信号分量的传输。

于是，得到这些参数后，我们将电路转换为带有这些参数的纯交流电路模型——“小信号等效电路”，然后分析信号的变化。

## MOS 和 BJT 都有的：

小信号参数：

## Transistor Parameters



- **Total instantaneous value**
  - Lowercase letter and uppercase subscript
  - $i_D, v_{GS}$
- **dc value**
  - Uppercase letter and uppercase subscript
  - $I_D, V_{GS}$
- **Instantaneous ac value**
  - Lowercase letter and lowercase subscript
  - $i_d, v_{gs}$
- **Phasor value**
  - Uppercase letter and lowercase subscript
  - $I_d, V_{gs}$
- **Superposition**
  - Total value = dc value + ac value
    - $i_D = I_D + i_d$
    - $v_{GS} = V_{GS} + v_{gs}$
  - Total value = dc value + phasor value
    - $i_D = I_D + I_d$
    - $v_{GS} = V_{GS} + V_{gs}$

November 9, 2020

Lecture Chapter 4

8

总瞬时值	直流值 dc	交流值 ac	相量值 ( $\approx$ 振幅)	总瞬时值 (某一时刻)	总瞬时值 (整体描述)
小 大	大 大	小 小	大 小	dc + ac	dc + 相量
$i_D$ $v_{GS}$	$I_D$ $V_{GS}$	$i_d$ $v_{gs}$	$I_d$ $V_{gs}$	$i_D = I_D + i_d$ $v_{GS} = V_{GS} + v_{gs}$	$i_D = I_D + I_d$ $v_{GS} = V_{GS} + V_{gs}$

直流交流电路转换:

表 6.2 各种元件在直流和小信号分析中的变换

元 器 件	I-V 关系	直 流 模 型	交 流 模 型
电阻	$I_R = \frac{V}{R}$	R	R
电容	$I_C = sCV$	开路 	C
电感	$I_L = \frac{V}{sL}$	短路 	L
二极管	$I_D = I_S(e^{v_D/V_T} - 1)$	$+V_r - r_f$	$r_d = V_T/I_D$ 
独立电压源	$V_S = \text{常量}$	$+V_S$ 	短路 
独立电流源	$I_S = \text{常量}$	$I_S$ 	开路 

直流交流电路转换时怎么变? 看表!

## MOS 管

具体到元器件, 还有一个参数: “跨导”  $g_m$

对于 mos 管的参数  $g_m$ , 我们需要先考虑一下 mos 管在小信号电路里的性质:

## Transconductance

- The instantaneous gate-to-source voltage is

$$v_{GS} = V_{GSQ} + v_i = V_{GSQ} + v_{gs}$$

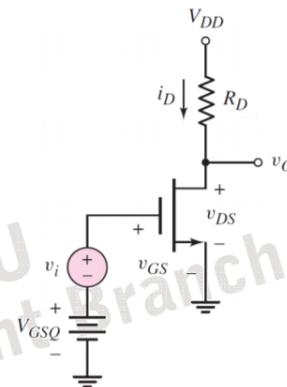
- The instantaneous drain current is

$$i_D = K_n(v_{GS} - V_{TN})^2$$

$$i_D = K_n(V_{GSQ} + v_{gs} - V_{TN})^2 = K_n[(V_{GSQ} - V_{TN}) + v_{gs}]^2$$

$$i_D = K_n(V_{GSQ} - V_{TN})^2 + 2K_n(V_{GSQ} - V_{TN})v_{gs} + K_nv_{gs}^2$$

- Small signal condition:  $v_{gs} \ll 2K_n(V_{GSQ} - V_{TN})$
- dc component:  $I_{DQ} = K_n(V_{GSQ} - V_{TN})^2$
- ac component:  $i_d = 2K_n(V_{GSQ} - V_{TN})v_{gs}$



在交流小信号, 也就是输入交流信号值比直流值小很多的情况下, 相当于输入信号在直流值附近轻微波动。

因此对于输出总信号  $i_D$ , 交流值的输入输出变化相当于将曲线  $i_D = K_n(v_{GS} - V_{TN})^2$  在直流输入  $V_{GSQ}$  处求导, 因此可以将展开后的二次项  $K_nv_{gs}^2$  忽略舍去。

于是，对于交流信号，

$$i_d = 2K_n(V_{GSQ} - V_{TN})v_{gs}$$

可见，交流电流  $i_d$  和交流电压  $v_{gs}$  的关系由  $2K_n(V_{GSQ} - V_{TN})$  决定，于是我们定义：

$$\text{跨导 } g_m = \frac{i_d}{v_{gs}} = 2K_n(V_{GSQ} - V_{TN})$$

$$\text{结合 } I_{DQ} = K_n(v_{GSQ} - V_{TN})^2 \text{ 变形可得： } g_m = 2\sqrt{K_n I_{DQ}}$$

交流等效电路：

## AC Equivalent Circuit

- The output voltage is

$$v_{DS} = v_o = V_{DD} - i_D R_D$$

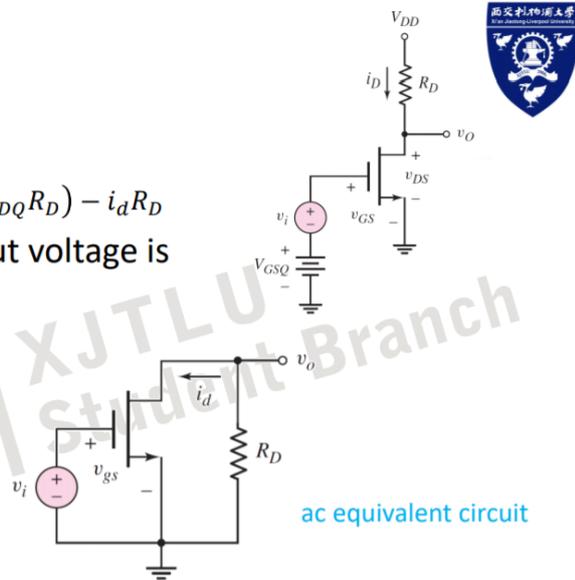
$$v_{DS} = V_{DD} - (I_{DQ} + i_d)R_D = (V_{DD} - I_{DQ}R_D) - i_d R_D$$

- The ac component of the output voltage is

$$v_o = v_{ds} = -i_d R_D$$

- Small-signal relationships

- dc sources are set to zero
- $v_{gs} = v_i$
- $i_d = g_m v_{gs}$
- $v_{ds} = -i_d R_D$



November 9, 2022

Lecture Chapter 4

11

此处的推导按理说是严谨合理的：将得到的总瞬时值  $v_{DS}$  分解成直流  $I_{DQ}R_D$  和交流  $i_d R_D$  两部分，去除对交流分析无用的固定直流值，得到交流等效电路。

但是这里当初非常让人迷惑，因为不少人(包括我)以为上下两个都是相同的“ $v_o$ ”。可这是错误的，明显可以算得上下两个  $v_o$  不相等。

所以，其实上下分别是  $v_o$  和  $v_o$ ……前者  $v_o$  是总瞬时值，后者  $v_o$  是交流值。

$v_o$   $v_o$

$v_o$  和  $v_o$ ，需要仔细观察的 PPT (恼)

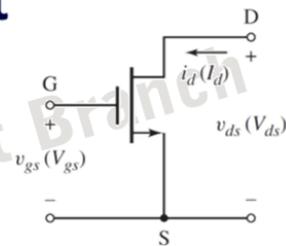
对于电流电压，可以分离直流交流化简电路

类似地，mos 管这个元器件，我们也可以抽象掉，变成带有小信号参数的数字电路  
(指 EEE103 里的那种电路)

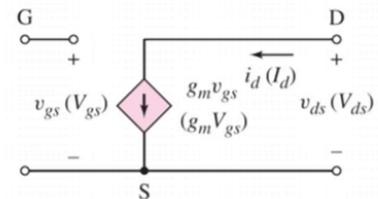
## Small-Signal Equivalent Circuit

- $i_d = g_m v_{gs}$
- $g_m = 2K_n(V_{GSQ} - V_{TN})$

- Dependent source
  - voltage-controlled current source
  - scaling factor:  $g_m$
  - ac component:  $i_d, v_{gs}, v_{ds}$
  - phasor component:  $I_d, V_{gs}, V_{ds}$



Common-source NMOS amplifier circuit



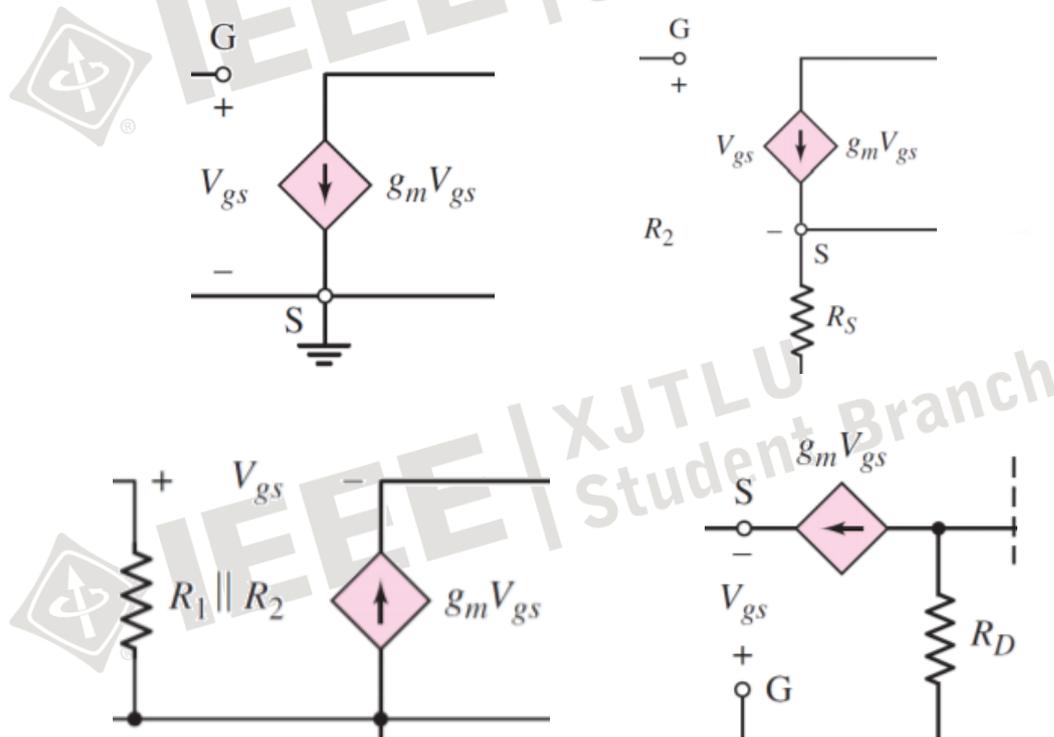
Small signal equivalent circuit

November 9, 2020

Lecture Chapter 4

12

不同的电路里，这等效电路的样子也会有微妙的变化，但\*其实\*是一样的：

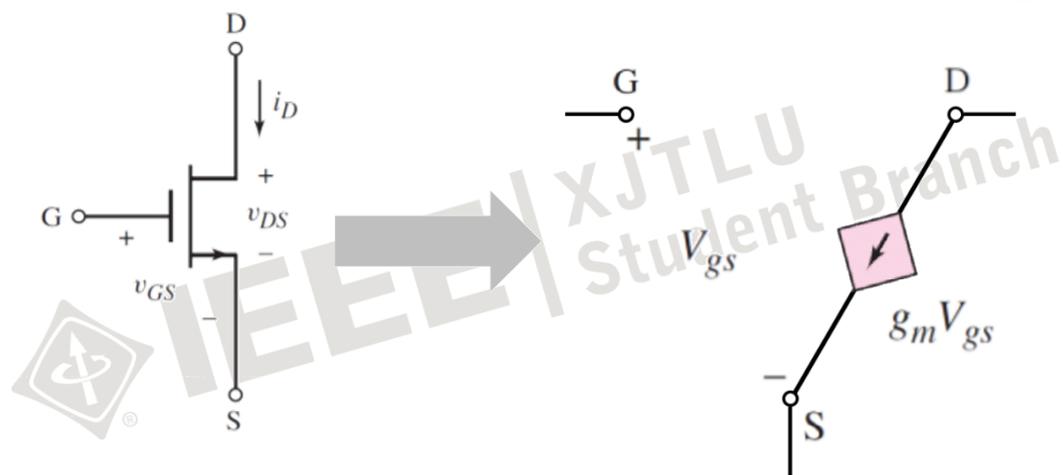


\*以上都是 n 型 MOS 管\*

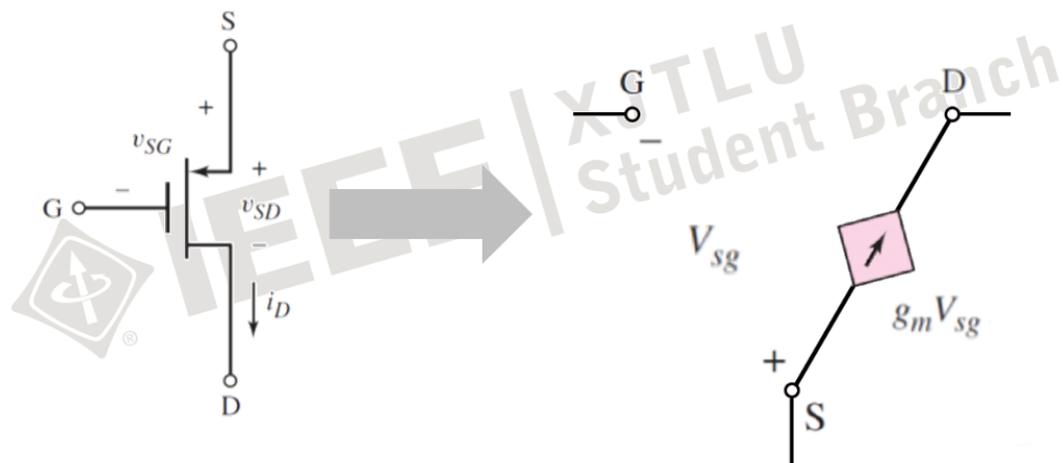
怎么样？找到规律了吗？是不是一样的？

可以做个总结：

n 型 mos:



P 型 mos:



特地使用了没有电路会用的三角形图示，避免对某种写法的偏爱。

其实等效电路的意思很直接：“DS 之间的电流和 GS 之间的电压成正比。”很单纯的，各位习惯就好。

理想的 MOS 管就和上面一样了。

但由于沟道长度调制效应，会生成一个输出电阻  $r_o = 1/\lambda I_{DQ}$  (详见笔记 week3-4)

## Finite Output Resistance



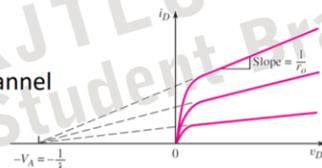
$$i_D = K_n [(v_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda v_{DS})]$$

- $1 + \lambda v_{DS} = 0$ , when  $i_D = 0$

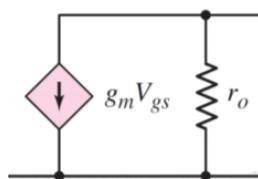
$$-v_{DS} = V_A = \frac{1}{\lambda}$$

- The output resistance due to the channel length modulation is defined as:

$$r_o = \left( \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \right)^{-1} \Big|_{v_{GS} = \text{constant}}$$



这个电阻和 mos 管串联，在交流分析时长这样：(不明白？回 P2 复习！)



交流等效电路里的输出电阻  $r_o$

值得一提的是， $r_o$ 会导致  $i_a$  的公式发生变化。但我问了老师，做题时两个式子都能用。

当然，具体以题目要求为准。(都行我肯定选简单的啊(´\_`))这可是考试诶，时间宝贵)



Bing Han [EEE]

周三 2020/12/16, 16:02



Dear Haochen,

Both two equations are correct. Because  $\lambda v_{ds}$  is very small. These two equations could be treated equally.

Usually, we could use second equation for convenience.

Please let me know if you still have any questions. Thanks.

Best regards,

Bing Han



Haochen.Luo19

周三 2020/12/16, 13:34

Bing Han [EEE]



Dear Professor. Han:

If the value of  $\lambda$  is given by the question, Should we consider it in calculating  $I_{DQ}$ ? Or ignore it and use the ideal equation?

$$i_D = K_n [(v_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda v_{DS})]$$

$$i_D = K_n (v_{GS} - V_{TN})^2$$

Which one should I choose?

## 共源(S)/共漏(D)/共栅(G)电路

其实不了解这些分类也不影响电路分析与做题，但学了可以快速对题中电路套入模版进行判断。不过也不排除题目直接考和这三类有关概念的可能……

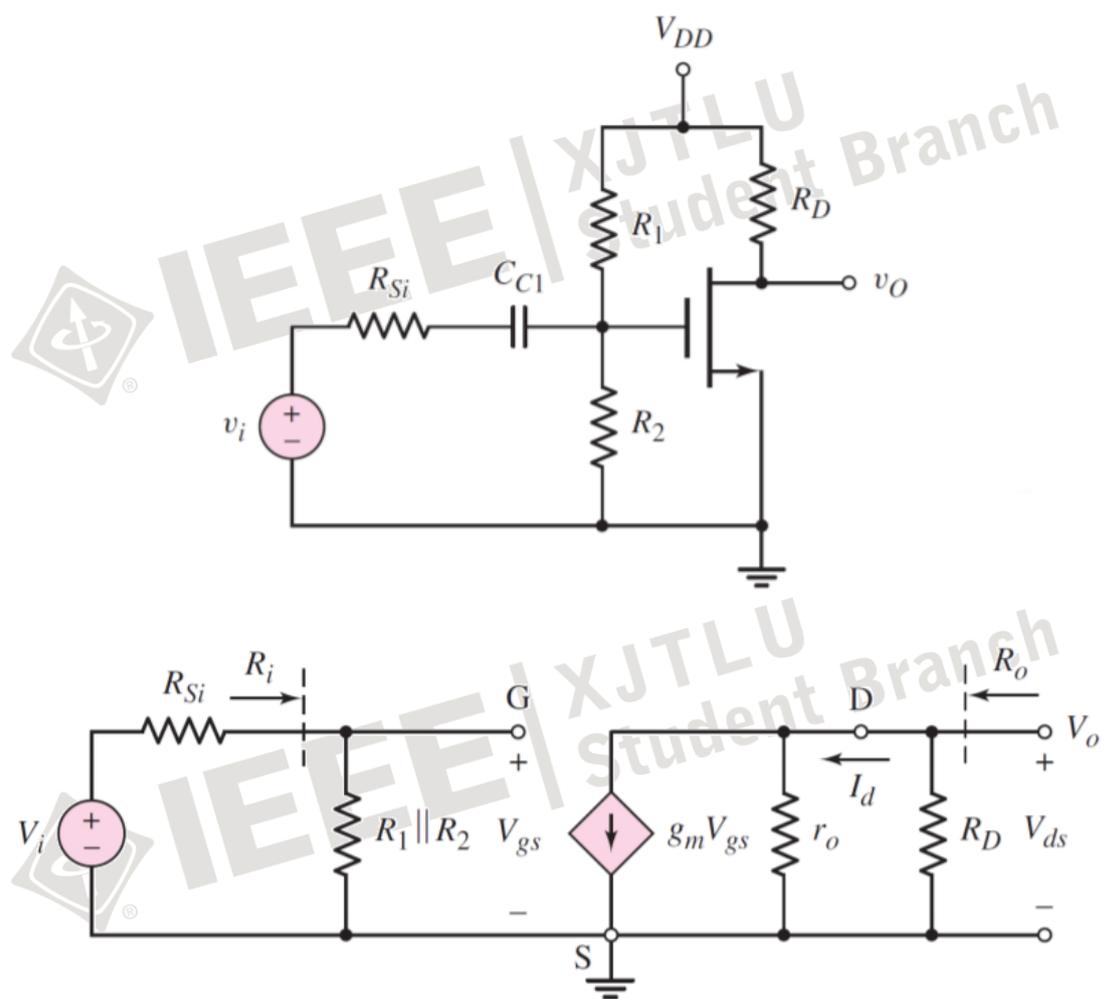
先理解什么是“共(common)”

这三种基本接法属于放大器电路。放大器，放大，那自然有输入和输出。而我们使用的 MOS 管不巧有三个头，一个接输入，一个接输出，那剩下的一个呢？——它都不属于，是公共的——“共”。

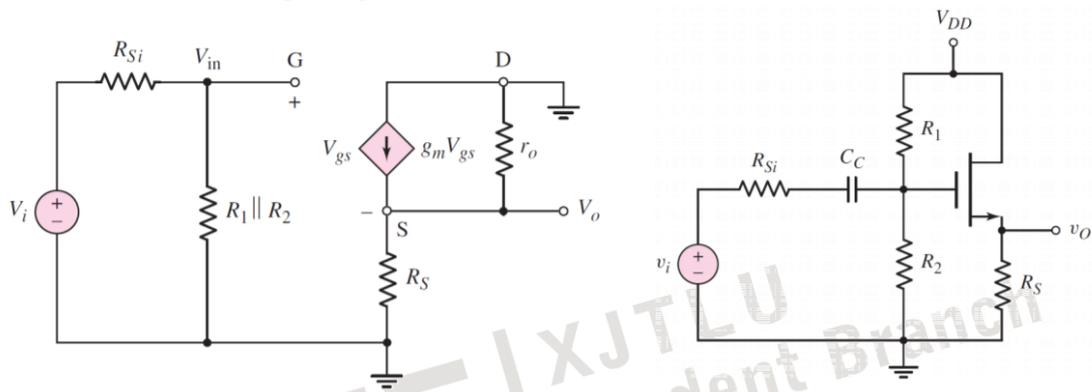
所以对于“共 X 极电路”，那 X 极就是不输入也不输出的一极，看戏。

有一个简单的判断方法：倘若有一极直接地/直流 VCC，它就与输入输出无关了，毕竟都直连了，其电压也动不了了，谈何输入？又谈何输出？

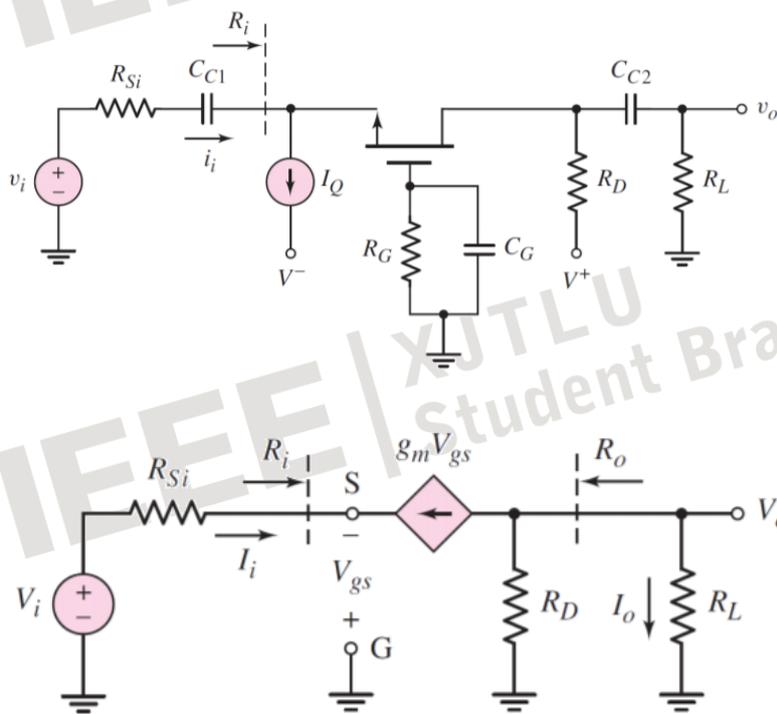
来看几个 PPT(week9)里的经典电路模型：



共源 common source



共漏 common drain



共栅 common gate

以及这仨的总结对比

Configuration	Voltage gain	Current gain	Input resistance	Output resistance
Common source	$A_v > 1$	—	$R_{TH}$ (biased resistor)	Moderate to high ( $R_D$ )
Common drain (source follower)	$A_v \cong 1$ (slightly less than 1)	—	$R_{TH}$ (biased resistor)	Low (a few hundred ohms)
Common gate	$A_v \geq 1$	$A_i \cong 1$	Low (a few hundred ohms)	Moderate to high ( $R_D$ )

其实没啥好拓展的，只是三种接法。只要 MOS 管性质不变，万变不离其宗嘛~

## 三极管 BJT

由于期中那会笔记只写到 MOS 管，现在详细写三极管也没时间且意义不大了，所以这里就快速总结一下(°▽。)反正去学校图书馆网站看了一下以前的考卷，提供的式子几乎覆盖了所有概念性的东西，所以记不住问题也不大，明白三极管性质就足够了。

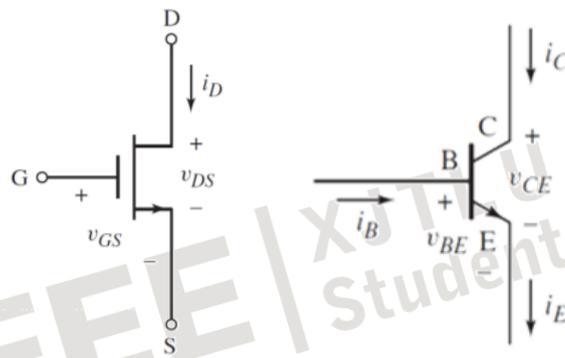
别问为什么这么久了啥也没写(;д)我哪里知道下半学期会这么忙！社团琐事+DDL+垃圾网课，你不如一刀把我杀了……

咳咳

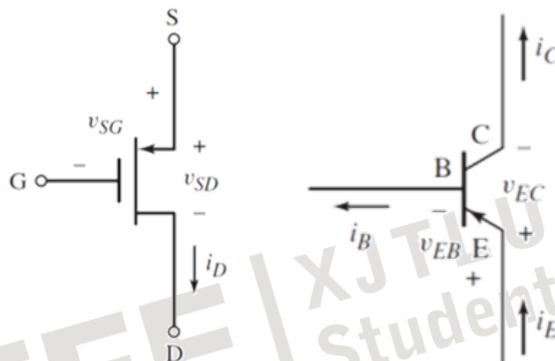
MOS 管有三极：源极(S) / 漏极(D) / 栅极(G)

BJT 也有三极：发射极(E) / 集电极(C) / 基极(B)

二者虽然原理截然不同，但作用却很相似，所以电路符号也很相似：



NMOS 和 npn BJT



PMOS 和 pnp BJT (不太像？上下翻转就像了)

唯一不同的是：

MOS 管以电压控制电流  $i_D = f(v_{GS})$

BJT 则以电流控制电流  $i_C = f(i_B)$

MOS 管的  $i_D = f(v_{GS})$  还挺复杂，但三极管的  $i_C = f(i_B)$  就简单了： $i_C = \beta i_B$

以下是总结：

npn	pnp
$i_C = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}$	$i_C = I_S e^{\frac{v_{EB}}{V_T}}$
$i_E = \frac{i_C}{\alpha} = \frac{I_S}{\alpha} e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}$	$i_E = \frac{i_C}{\alpha} = \frac{I_S}{\alpha} e^{\frac{v_{EB}}{V_T}}$
$i_B = \frac{i_C}{\beta} = \frac{I_S}{\beta} e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}$	$i_B = \frac{i_C}{\beta} = \frac{I_S}{\beta} e^{\frac{v_{EB}}{V_T}}$
For both transistors	
$i_E = i_C + i_B$	$i_C = \beta i_B$
$i_E = (1 + \beta) i_B$	$i_C = \alpha i_E$
$\alpha = \frac{\beta}{1 + \beta}$	$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$

上面的二极管形式电流方程是通过给定电压直接算电流，一般用不到。知道三个电流之间的关系就好。

以及，直流分析时，如果 $V_{BE}$ 没给那就默认 0.7V

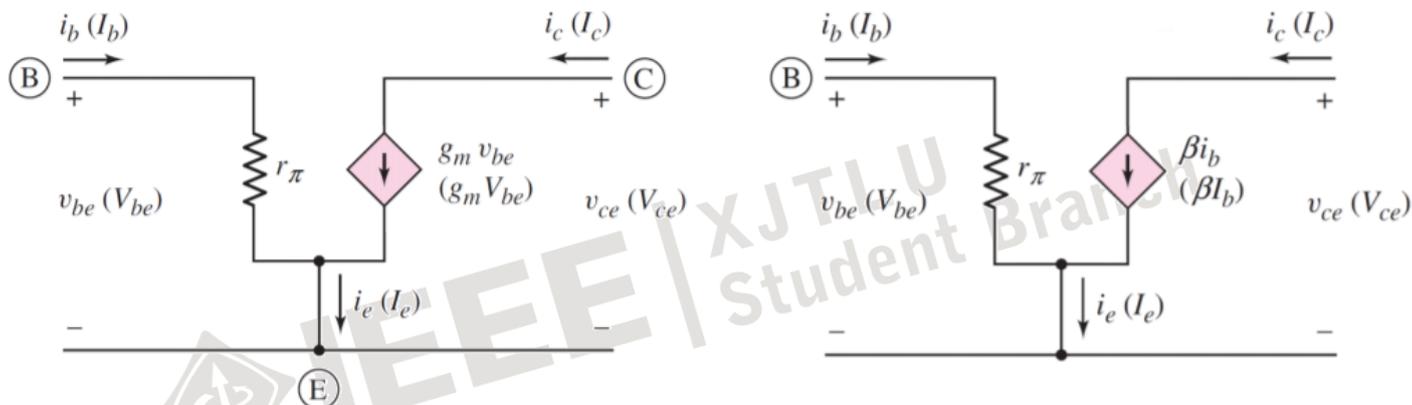
第二题为什么没给  $V_{be(on)}$  可以默认 0.7V 吗

老师说可以

那还挺严谨的嘛(´\_ゝ`)

交流等效电路：混合 $\pi$ 等效电路（以 npn 三极管为例）

三极管的等效电路模型很多，我们使用的是“混合 $\pi$ 等效电路”



这俩是等价的

可以看到，有扩散电阻 $r_\pi$ 和跨导 $g_m$ 两个参数。

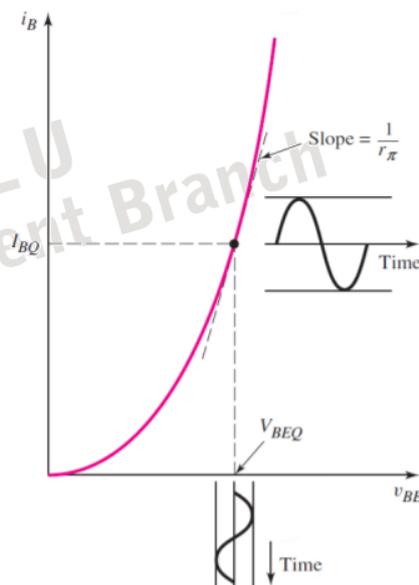
扩散电阻 $r_\pi$ ：

物理意义如右图所示，我们使用的公式是经过一系列近似计算后的产物。

$$i_B = I_{BQ} e^{\frac{v_{be}}{V_T}} \approx I_{BQ} \left( 1 + \frac{v_{be}}{V_T} \right) = I_{BQ} + i_b$$

$$i_b = \left( \frac{I_{BQ}}{V_T} \right) v_{be}$$

$$i_b = \left( \frac{I_{BQ}}{V_T} \right) v_{be} = \frac{1}{r_\pi} v_{be} \quad r_\pi = \frac{V_T}{I_{BQ}} = \frac{\beta V_T}{I_{CQ}}$$



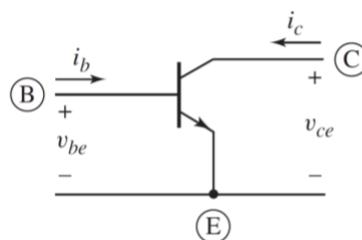
跨导 $g_m$ ：

三极管也有 $g_m$ ，不过公式和 MOS 管不同。

Output Collector-Emitter Port

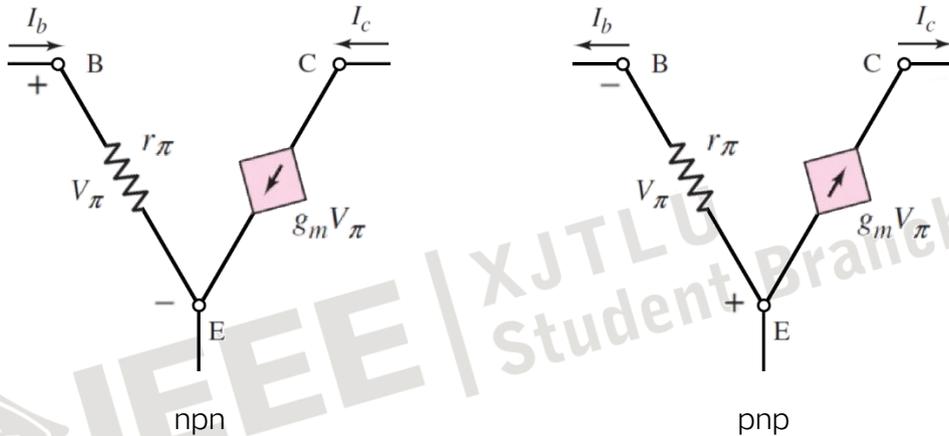
$$i_C = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} \quad g_m = \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} = \frac{1}{V_T} I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} = \frac{I_{CQ}}{V_T}$$

- $g_m$  is transconductance



以及，由最上面两个等价的电路可以得到： $r_\pi g_m = \beta$

和 mos 一样做个总结:



以上是理想三极管。

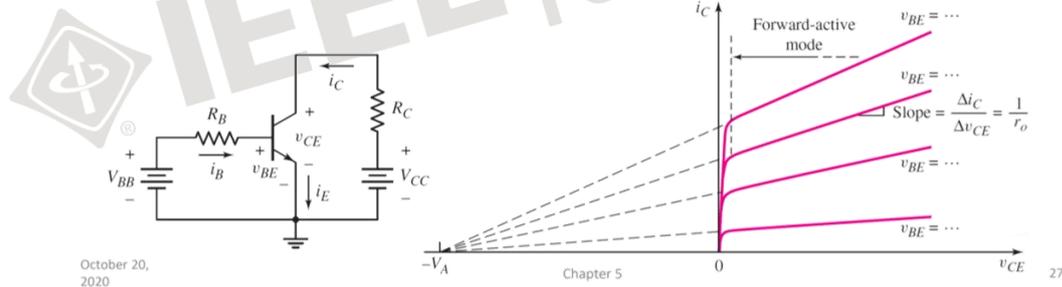
但和 MOS 管类似, 由于厄利效应, 会生成一个输出电阻  $r_o$  :

### I-V Characteristics of the Common-Emitter Circuit



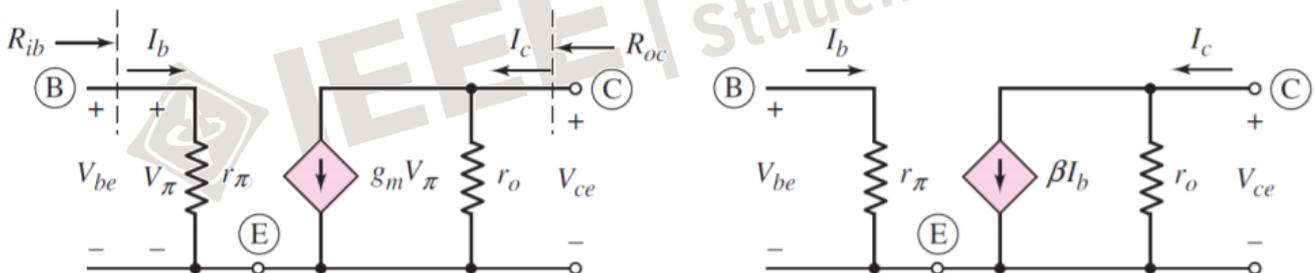
- **Early effect** (bandwidth modulation)
  - $V_A > 0$  is called **early voltage**
  - $i_C$  in active region slightly depends on  $V_{CE}$  (Nonzero slope curve)
- $r_o$  is output resistance, it may significantly affect the amplifier characteristics

$$i_C = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} \left( 1 + \frac{V_{CE}}{V_A} \right)$$



因为  $V_A$  相对来说很大, 我们使用此公式计算  $r_o$  :

$$r_o = \frac{V_A}{I_{CQ}}$$



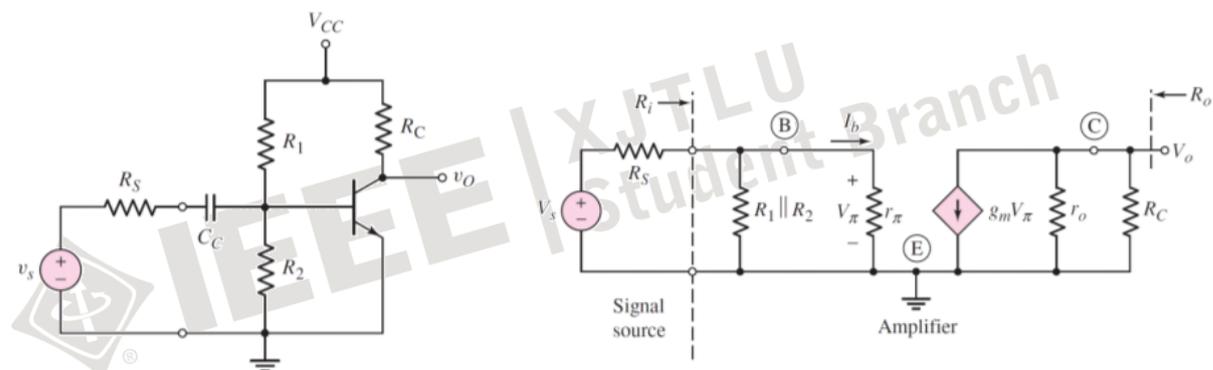
于是:

带  $r_o$  的三极管小信号等效电路

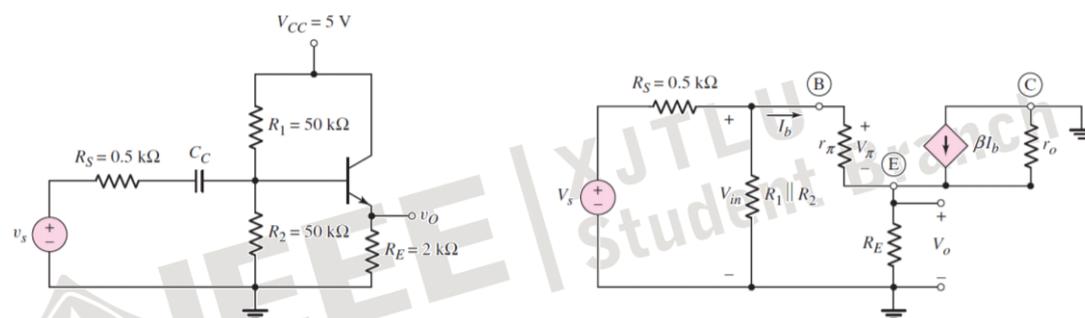
和 MOS 管一样，BJT 放大电路也有三种基本接法，

共射(E)/共集(C)/共基(B) 来点 PPT 基本样例：

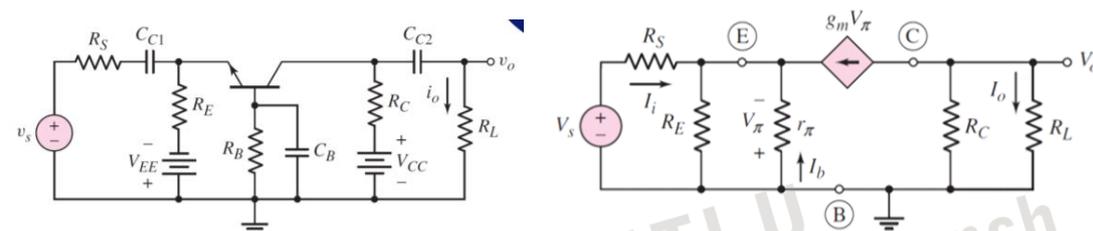
共发射极 common emitter 一般都考这个(应该



共集电极 common collector 又叫射极跟随器 emitter follower



共基极 common base

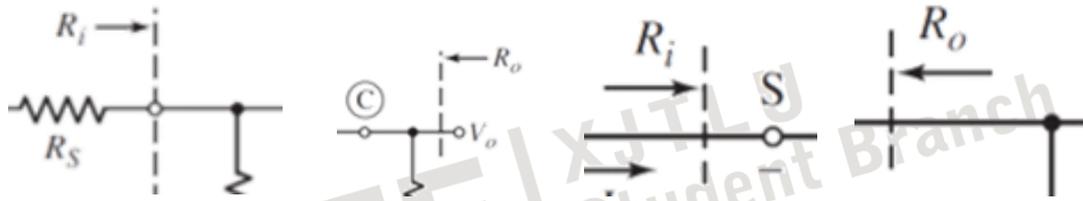


性质总结：

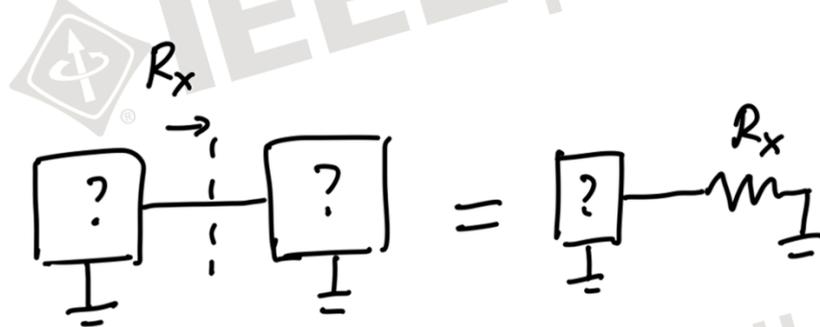
Configuration	Voltage gain	Current gain	Input resistance	Output resistance
Common emitter	$A_v > 1$	$A_i > 1$	Moderate	Moderate to high
Common collector	$A_v \cong 1$	$A_i > 1$	High	Low
Common base	$A_v > 1$	$A_i \cong 1$	Low	Moderate to high

## 输入和输出电阻

之前的图里有不少带虚线的电阻表示

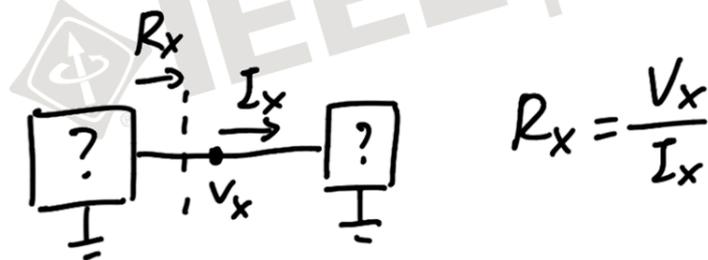


其大意是“箭头指向的那边的所有结构对于另一边而言可以看作一个电阻”

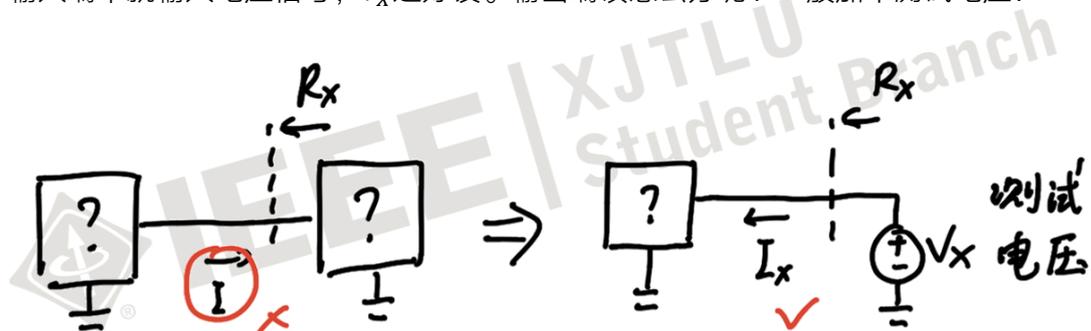


比如我们题目里会求的输入和输出电阻。

怎么求呢？用电阻的定义  $R = V/I$



输入端本就输入电压信号， $V_x$ 还好设。输出端该怎么办呢？一般加个测试电压：



然后在交流等效电路里进行普通的直流分析就好啦(\*v)~

如果不放心/不会算，结合课内 ppt 来看就没问题了！

好，那么，我们的 week5-10 的(水)笔记就到此为止了，希望能在最后的复习时间里给大家一些帮助，感谢各位观看。

接下来是 week11 了，频率响应害挺抽象的(´\_>`)

相信本文档会多有错漏与不足，也请各位看官 dalao 与我们交流提问纠错指正。

\*……交流渠道……\*



西浦科协唯一指定关注二维码

你可以把文档相关的问题发给公众号，我们会及时查看回复。

[本章无 source]

2021.1.7 醜坦